TS	Physique	Cassini a rendez-vous avec Saturne	Exercice résolu

Enoncé

Les trois parties sont indépendantes.

La planète Saturne est entourée de nombreux satellites et anneaux.

Données :

- Distance Soleil-Saturne : D = 1,425 x 10^9 km
- Rayon de Saturne R_S = 60 x 10^3 km
- Le tableau suivant donne les caractéristiques des orbites circulaires de certains satellites de Saturne :

Satellites	Durée de révolution			Rayon de l'orbite (x 10^3 km)
Janus		17 h	58 min	159,0
Mimas		22h	37 min	185,8
Encelade	1 j	8 h	53 min	283,3
Dione	2 j	17 h	41 min	377,9

- Les anneaux sont formés de divers éléments (cailloux, poussières et blocs de glace) non regroupés entre eux et tournant autour de Saturne :
  - Rayon intérieur du premier anneau : 7,40 x 10^4 km
  - Rayon extérieur du dernier anneau : 1,36 x 10^5 km
- Constante de gravitation universelle : G = 6,67 x $^{-11}$ S.I
- Tous les astres et satellites sont considérés à répartition sphérique de masse (objets ponctuels).

A. Première partie : masse de Saturne

1. Pour étudier le mouvement des satellites de Saturne, il convient de se placer dans un référentiel particulier que l'on peut appeler « saturnocentrique » (par analogie avec « géocentrique »). Comment définir le référentiel « saturnocentrique » ?

2. A partir du bilan des forces exercées sur un satellite de Saturne de masse m (on négligera l'action des autres astres et des autres satellites) :
   a) Montrer que le mouvement du satellite est nécessairement uniforme.
   b) Démontrer la relation $v^2 = \frac{G.M_S}{r}$ qui lie la valeur v de la vitesse du satellite, le rayon r de son orbite, la masse M_S de Saturne et la constante de gravitation universelle G.

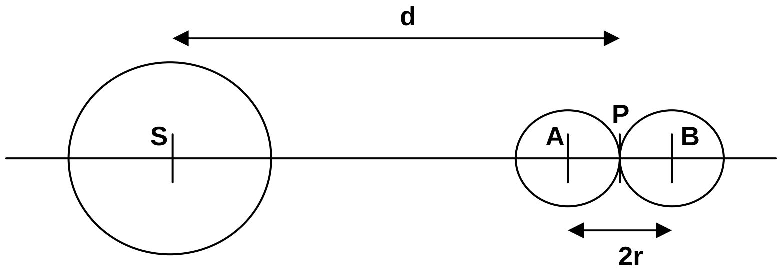
3. *a)* Enoncer la troisième loi de Kepler dans l'approximation des orbites circulaires, et établir la relation : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$, avec T la période de révolution du satellite autour de Saturne.
   b) En utilisant les données relatives à l'un des satellites, en déduire la masse de Saturne.

4. A et B sont deux éléments de deux anneaux différents. Le centre S de Saturne, A et B étant initialement sur une même droite, cet alignement sera-t-il ultérieurement conservé ?

B. <u>Deuxième partie</u> : sphère de Roche

Il existe une distance R_0, appelée rayon de la sphère de Roche (centrée sur le centre de Saturne), qui marque la limite entre une zone où les satellites peuvent se former par assemblage de poussières, cailloux… qui s'étaient formés en même temps que l'astre, et une zone où cet assemblage est rendu impossible par l'action de l'astre. Dans cette partie, il s'agit de déterminer les raisons de l'existence de cette limite qui explique en partie l'existence des anneaux de Saturne.

1. On considère donc deux sphères homogènes identiques, de masse m et de rayon r, en contact de telle façon que la distance de leur centre A et B soit AB = 2r. Le centre de gravité P de l'ensemble des deux sphères tourne à une distance d du centre S de Saturne. Les points S, A, P et B sont alignés (voir schéma ci-contre).



   Exprimer, en fonction des paramètres utiles choisis parmi m, M_S, G, r, R_S et d, la valeur la valeur F de la force d'attraction qui s'exerce entre les sphères de centre A et B.

2. Les deux sphères sont attirées par Saturne par deux forces $\vec{F}_{S/A}$ et $\vec{F}_{S/B}$. On montre que la différence des valeurs de ces forces est : $F_{S/A} - F_{S/B} = 4\dfrac{G.M_S.m.r}{d^3}$, et que cette différence d'attraction a tendance à séparer les deux sphères.
   Pourquoi les deux sphères ne sont-elles pas attirées de la même façon par Saturne ?

3. Le rayon R_0 de la sphère de Roche est tel que, pour $d = R_0$, on a $F = F_{S/A} - F_{S/B}$.
   a) L'espace pour lequel $F_{S/A} - F_{S/B} < F$ où les deux éléments A et B peuvent se regrouper pour donner naissance à un élément plus gros est-il défini par $d < R_0$ ou par $d > R_0$?
   b) Les données fournies au début du texte sont-elles en accord avec l'existence de la sphère de Roche ?

C. <u>Troisième partie</u> : la descente de la sonde Huygens vers Titan

En 2008, la sonde Huygens de l'Agence Spatiale Européenne (emportée par le module Cassini de la NASA) plongera à la découverte de Titan, le plus gros satellite saturnien, sorte de terre primitive qui est l'un des objets les plus étranges du système solaire.

Pendant cette phase, le champ de pesanteur de Titan $\vec{g}$ sera supposé uniforme ($g = 1{,}4\ m.s^{-2}$).

Pour notre étude, dans le référentiel de Titan (par analogie au référentiel terrestre), on choisit un repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$ avec :

- l'axe Oz (de vecteur unitaire $\vec{k}$) parallèle et de <u>sens contraire</u> à $\vec{g}$,
- l'axe Ox (de vecteur unitaire $\vec{i}$) <u>sur le sol</u> de Titan, supposé horizontal.

On suppose que la sonde, freinée par un parachute, descendra dans le plan xOz d'un mouvement <u>vertical uniforme</u> avec une vitesse de valeur $v_1 = 10\ m.s^{-1}$.

La sonde, étant arrivée au point M_0 de coordonnées (x_0 = 0 et z_0 = 3,0 km), à un instant pris comme origine des temps, une balise radio sera éjectée <u>horizontalement</u> dans le plan xOz avec le vecteur vitesse $\vec{v}_2$ de valeur v_2 = 2 m.s^{-1} par rapport à la sonde : cela signifie qu'au point M_0, la balise radio a un vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Le mouvement de la sonde est supposé non modifié par l'éjection de la balise. Celle-ci tombe dans le champ de pesanteur de Titan, les frottements gazeux étant supposés négligeables.

1. On appelle z_S l'altitude instantanée de la sonde, x_B et z_B les coordonnées instantanées de la balise. Déterminer les équations horaires littérales : $z_S(t)$, $x_B(t)$ et $z_B(t)$.
2. Déterminer les expressions littérale et numérique de l'équation de la trajectoire de la balise radio.
3. Lequel des deux objets, la sonde ou la balise, touchera le sol de Titan en premier ? Quel est l'intervalle de temps Δt qui séparera les deux arrivées ?

Corrigé

A. Première partie : masse de Saturne

1. Comment définir le référentiel « saturnocentrique » ?

Le référentiel « saturnocentrique » a pour origine O le centre de Saturne et ses trois axes pointent vers trois étoiles fixes.

2.a) Montrer que le mouvement du satellite est nécessairement uniforme.

Le satellite, de centre d'inertie G, est soumis à la seule action de la force $\vec{F}$ de gravitation. En appliquant la deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m.\vec{a}_G$. Or, $\vec{F}$ est radiale et centripète : il s'ensuit que $\vec{a}_G$ est radial et centripète. Dans une base de Frenet $(G, \vec{\tau}, \vec{n})$ la composante tangentielle $\vec{a}_\tau$ du vecteur accélération est donc nulle. On a alors $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = 0$ => v = Cte : le mouvement est uniforme.

b) Démontrer la relation $v^2 = \dfrac{G.M_S}{r}$ qui lie la valeur v de la vitesse du satellite, le rayon r de son orbite, la masse M_S de Saturne et la constante de gravitation universelle G.

La loi de gravitation universelle permet d'écrire : $\vec{F} = -G.\dfrac{m.M_S}{r^2}\vec{u} = m.\vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G = -G.\dfrac{M_S}{r^2}\vec{u}$

(avec $\vec{u}$ vecteur unitaire colinéaire et de sens contraire à $\vec{F}$) => $a_G = G.\dfrac{M_S}{r^2}$

Par ailleurs : $\vec{a}_G = \vec{a}_n$ et donc $a_G = a_n = \dfrac{v^2}{r}$ => $\dfrac{v^2}{r} = G.\dfrac{M_S}{r^2}$ et $\boxed{v^2 = \dfrac{G.M_S}{r}}$

3. a) Enoncer la troisième loi de Kepler dans l'approximation des orbites circulaires, et établir la relation : $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G.M_S}$, avec T la période de révolution du satellite autour de Saturne.

Le carré de la période T de révolution d'une planète autour d'un astre est proportionnelle au cube du rayon r de son orbite.

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (ω : vitesse angulaire) et $\omega = \dfrac{v}{r}$ => $T = \dfrac{2.\pi.r}{v}$ et $T^2 = \dfrac{4\pi^2 r}{v^2}$

Or : $v^2 = \dfrac{G.M_S}{r}$ => $\boxed{\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{G.M_S}}$

b) En utilisant les données relatives à l'un des satellites, en déduire la masse de Saturne.

$\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4.\pi^2}{G.M_S} \Rightarrow \boxed{M_S = \dfrac{4.\pi^2.r^3}{G.T^2}}$

Dans le cas de Janus ($r = 159{,}0 \times 10^6$ m et T = 17 h 58 min ou $6{,}468 \times 10^4$ s)

$M_S = \dfrac{4.\pi^2 \times (159{,}0 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (6{,}468 \times 10^4)^2} = \mathbf{5{,}69 \times 10^{26}\ kg}$

4. A et B sont deux éléments de deux anneaux différents. Le centre S de Saturne, A et B étant initialement sur une même droite, cet alignement sera-t-il ultérieurement conservé ?

Les vitesses des éléments A et B seront différentes car leur altitude est différente.
L'alignement ne pourra pas être conservé.

B. Deuxième partie : sphère de Roche

1. Exprimer, en fonction des paramètres utiles choisis parmi m, M_S, G, r, R_S et d, la valeur la valeur F de la force d'attraction qui s'exerce entre les sphères de centre A et B.

La loi de gravitation universelle permet d'écrire directement l'expression de la valeur de la force d'attraction qui s'exerce entre les 2 sphères A et B : $\boxed{F = \frac{G.m^2}{4r^2}}$

2. Pourquoi les deux sphères ne sont-elles pas attirées de la même façon par Saturne ?

Les 2 sphères ne se trouvent pas à la même distance de Saturne : A, plus proche, sera soumise à une interaction plus importante.

3.a) L'espace pour lequel $F_{S/A} - F_{S/B} < F$ où les deux éléments A e B peuvent se regrouper pour donner naissance à un élément plus gros est-il défini par $d < R_0$ ou par $d > R_0$?

Pour $d = R_0$: $F = F_{S/A} - F_{S/B}$ soit $\frac{G.m^2}{4r^2} = 4\frac{G.M_S.m.r}{R_0^3}$

Si $F_{S/A} - F_{S/B} < F$, alors les 2 éléments A et B peuvent se regrouper car l'attraction de A sur B l'emporte sur l'attraction de Saturne sur A et B. La condition s'écrit :

$$4\frac{G.M_S.m.r}{d^3} < \frac{G.m^2}{4r^2} \text{ soit } 4\frac{G.M_S.m.r}{d^3} < 4\frac{G.M_S.m.r}{R_0^3} \Rightarrow \boxed{d > R_0}$$

b) Les données fournies au début du texte sont-elles en accord avec l'existence de la sphère de Roche ?

Tous les satellites de Saturne se trouvent à une distance supérieure à celle des anneaux…ce qui confirme l'inégalité ci-dessus.

C. Troisième partie : la descente de la sonde Huygens vers Titan

1. Déterminer les équations horaires $z_S(t)$, $x_B(t)$ et $z_B(t)$.

<u>Etude du mouvement de la sonde</u> :

La sonde est animée d'un mouvement vertical uniforme : le vecteur accélération de son centre d'inertie est égal au vecteur nul. Par projection dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$: $v_S = Cte = v_1 \Rightarrow$ $\mathbf{z_S = -v_1.t + z_0}$

<u>Etude du mouvement de la balise</u> :

La balise, de masse m et de centre d'inertie G , n'est soumise qu'au champ de pesanteur de Titan. La deuxième loi de Newton permet d'écrire : $\vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$

Conditions initiales :

A la date t = 0, le centre d'inertie de la balise est en M_0 avec une vitesse initiale de valeur v_0.

$$\overrightarrow{OM_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ z_0 = 3{,}0 \times 10^3 \text{ m} \end{cases} \qquad \vec{V_0}\begin{cases} v_{0x} = v_2 \\ v_{0z} = -v_1 \end{cases}$$

Projection dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$: $\overrightarrow{a_G} = \vec{g} \Rightarrow \overrightarrow{a_G}\begin{cases} a_x = 0 = \frac{dv_x}{dt} \\ a_z = -g = \frac{dv_z}{dt} \end{cases}$

Par intégration et en tenant compte des conditions initiales, on obtient successivement les coordonnées des vecteurs vitesse et position :

$$\overrightarrow{a_G}\begin{cases} a_x = 0 = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow v_x = v_{0x} = v_2 \\ a_z = -g = \frac{dv_z}{dt} \Rightarrow v_z = -g.t - v_1 \end{cases} \qquad \vec{V}\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_2 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \mathbf{x_B = v_2.t} \\ v_z = -g.t - v_1 = \frac{dz}{dt} \Rightarrow \mathbf{z_B = -\frac{1}{2}.g.t^2 - v_1.t + z_0} \end{cases}$$

2. Déterminer les expressions littérale et numérique de l'équation de la trajectoire de la balise radio.

$x = v_2.t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_2}$ et $z = -\dfrac{1}{2}.g.\left(\dfrac{x}{v_2}\right)^2 - v_1.\left(\dfrac{x}{v_2}\right) + z_0 \Rightarrow \mathbf{z = -\left(\dfrac{g}{2.v_2^{\,2}}.\,x^2\right) - \left(\dfrac{v_1}{v_2}.\,x\right) + z_0}$

Soit : $z = -\left(\dfrac{1{,}4}{2\times 2^2}.x^2\right) - \left(\dfrac{10}{2}.\,x\right) + 3000 \Rightarrow \mathbf{z = -\,0{,}175.x^2 - 5.x + 3000}$

3. Lequel des deux objets, la sonde ou la balise, touchera le sol de Titan en premier ? Quel est l'intervalle de temps Δt qui séparera les deux arrivées ?

La date t_B à laquelle la balise touche le sol est donnée par :

$$-\frac{1}{2}.g.t_B^{\,2} - v_1.t_B + z_0 = 0 \quad \text{soit : } -0{,}7.t_B^{\,2} - 10.t_B + 3000 = 0$$

La racine positive de cette équation du second degré est : $\mathbf{t_B = 59\ s}$.

La date t_S à laquelle la sonde touchera le sol est donnée par :

$- v_1.t_S + z_0 = 0 \Rightarrow t_S = \dfrac{z_0}{v_1}$ soit $\mathbf{t_S} = \dfrac{3000}{10} = \mathbf{300\ s}$.

La balise touchera le sol en premier et la sonde arrivera après un intervalle de temps :

$\Delta t = t_S - t_B$ soit $\mathbf{\Delta t} = 300 - 59 = \mathbf{241\ s}$.