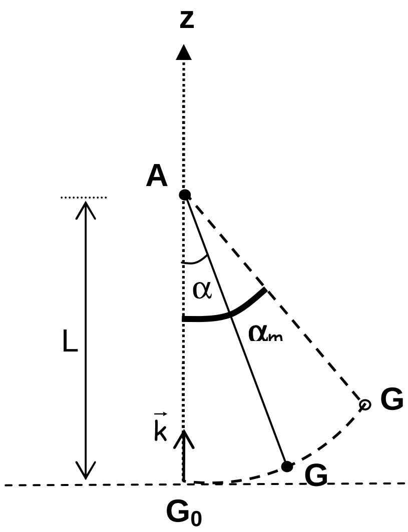
TS	Physique	Les oscillateurs mécaniques	Sujet de synthèse

Enoncé

Les quatre parties sont indépendantes.



I. Première partie : le pendule simple

Données : $g = 10{,}0\ m.s^{-2}$; $L = 1{,}00\ m$; $\cos \alpha_m = 0{,}95$

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on étudie les oscillations d'un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m, attachée à l'une des extrémités d'un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur L. L'autre extrémité du fil est attachée en un point fixe A (voir schéma ci-contre).
Écartée de sa position d'équilibre G_0, la masse m est abandonné au point G_i sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$.
Le pendule oscille alors sans frottement avec une amplitude α_m. Une position quelconque G est repérée par l'élongation angulaire α mesurée à partir de la position d'équilibre.

A. Etude énergétique

1. Donner l'expression de l'énergie cinétique au point G.

2. Dans le repère $(G_0, \vec{k})$, on prend l'origine des énergies potentielles de pesanteur au point G_0. Dans ce cas, l'énergie potentielle de pesanteur au point G peut s'exprimer par : $E_p = m.g.L.(1 - \cos \alpha)$

a) Donner l'expression de l'énergie mécanique E au point G en fonction de m, g, L, v et α.

b) Pourquoi cette énergie mécanique se conserve-t-elle au cours des oscillations ?

3. *a)* En exploitant la conservation de l'énergie mécanique, exprimer la vitesse v_0 au passage par la position d'équilibre en fonction de g, L et α_m.

b) Calculer v_0.

B. Isochronisme

1. Énoncer la loi d'isochronisme des petites oscillations.

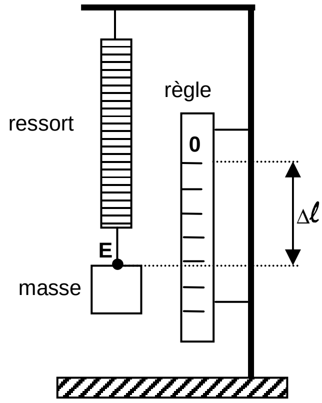
2. En justifiant par une analyse dimensionnelle, choisir l'expression correcte de la période propre T_0 des oscillations parmi les suivantes :

$$T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{g}{L}} \quad ; \quad T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{\alpha_m}{L}} \quad ; \quad T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{L}{g}} \quad ; \quad T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{L}}$$

II. Deuxième partie : le ressort

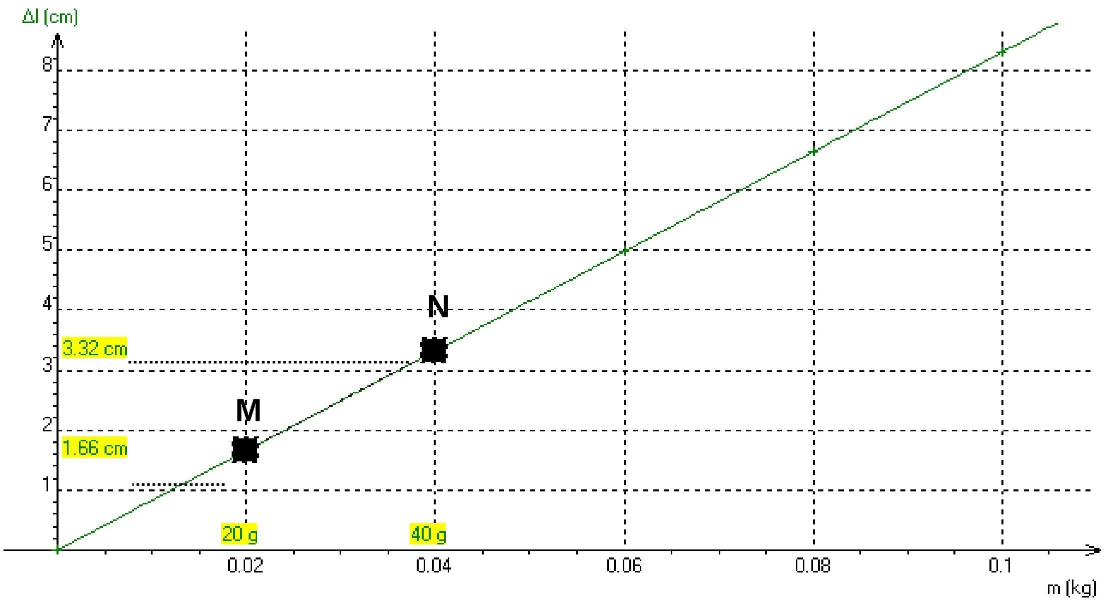
Donnée : g = 10,0 m.s^{-2}

Indications numériques : $\dfrac{166}{20} = 8{,}3$; $\dfrac{100}{8{,}3} = 12$



On désire déterminer, par une méthode statique, la constante de raideur k d'un ressort. Le ressort est à spires non jointives et est utilisé dans son domaine d'élasticité. Le ressort à étudier est accroché à une potence. A l'extrémité libre, notée E, on suspend successivement des masses de différentes valeurs. Le zéro de la règle correspond à la position de E à vide. Pour chaque masse m on mesure l'allongement $\Delta\ell$ du ressort à l'équilibre.

A l'aide d'un tableur-grapheur, on a construit le graphe ci-dessous, représentatif de la fonction m →($\Delta\ell$)m. Sur la courbe obtenue, on a repéré la position de deux points M et N.



1. Déduire du graphe une relation numérique entre $\Delta\ell$ et m.

2. *a)* Après avoir fait le bilan des forces extérieures s'exerçant sur une masse m, établir l'expression littérale de la constante de raideur k du ressort.

b) Après avoir rappelé l'unité de cette constante dans le Système International, vérifier l'homogénéité de l'expression par une analyse dimensionnelle.

c) Calculer la valeur de k.

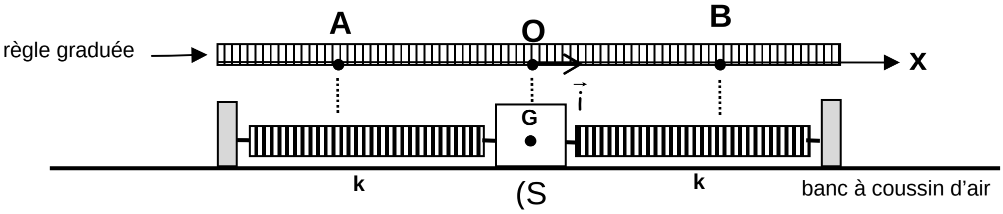
III. Troisième partie : le système solide-ressort

Indications numériques :

$\frac{6,28}{21,18} = 0,297$; $6,28 \times \sqrt{2,25 \times 10^{-3}} = 0,298$; $\frac{1,00 \times 10^{-3}}{0,298} = 3,36 \times 10^{-3}$;

$6,28 \times \frac{4,3 \times 10^{-2}}{0,30} = 0,90$

Un solide (S), de masse m = 54,0 g et de centre d'inertie G, est posé sur un banc à coussin d'air horizontal et est attaché à deux ressorts identiques à spires non jointives de constante de raideur k = 12,0 $N.m^{-1}$. Une règle graduée horizontale est placée au-dessus du banc. Lorsque le système solide-ressort est en équilibre, le point G est repéré à la verticale du point O (zéro) de la règle graduée (voir schéma ci-dessous).



- On écarte le solide (S) vers la gauche et on l'abandonne, sans vitesse initiale, à l'instant où le point G est à la verticale du point A : G oscille alors entre les points A et B.

Remarque : la masse des ressorts est négligeable et les deux ressorts restent tendus pendant toute la durée des expériences.

- On filme, avec une caméra numérique, les oscillations libres du solide (S). Un logiciel approprié permet ensuite de pointer les positions successives du point G dans le repère (O, $\vec{i}$), entre les deux positions extrêmes A et B.

Remarque : le pointage commence un peu avant le premier passage du point G à la verticale du point O et l'origine des dates correspond au passage du point G à cette première position enregistrée.

- Le fichiers de données est enfin transféré vers un logiciel de traitement de données qui permet d'afficher (voir graphe en annexe 2) la courbe expérimentale représentative de la fonction t → x(t), ainsi que les résultats de sa modélisation.

A. Etude théorique du mouvement du solide

Remarque préliminaire : dans cette étude, tous les frottements sont négligés.

On peut modéliser l'oscillateur mécanique horizontal décrit précédemment par un système solide-ressort constitué du même solide (S) de masse m et de centre d'inertie G, fixé à l'extrémité d'un seul ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K (voir schéma en annexe 1).

Le mouvement de (S) est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen et la position de G est repérée par son abscisse x dans le repère (O, $\vec{i}$). L'origine des abscisses correspond à la position de G lorsque le système est au repos (le ressort n'est alors ni étiré, ni comprimé). Le solide est écarté de sa position d'équilibre et mis en oscillation. La période propre de ces oscillations est T_0.

1. Forces exercées sur le solide en mouvement

a) On note $\vec{F}$ la force exercée par le ressort sur le solide (S). Faire le bilan des autres forces extérieures qui s'exercent sur (S) à une date quelconque. Représenter toutes ces forces au point G, sans souci d'échelle, sur le schéma en annexe 1.
b) En rappelant l'expression de $\vec{F}$ dans le repère $(O, \vec{i})$, vérifier que cette force a bien le sens attendu sur le schéma en annexe 1.

2. Équation différentielle du mouvement du solide

a) En appliquant la deuxième loi de Newton au solide (S), établir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G.
b) Sachant que la solution générale de l'équation différentielle est de la forme $x = X_m.\cos\left[\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).t + \varphi_0\right]$, montrer que l'expression de la période propre T_0 de l'oscillateur est : $T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{K}}$.
c) Vérifier l'homogénéité de l'expression de T_0 par une analyse dimensionnelle.

B. Retour à l'expérience

1. Sur le graphe en annexe 2, représenter les grandeurs expérimentales $T_{0,exp}$ et $X_{m,exp}$ par des segments en trait épais sur chacun des deux axes.

2. Déterminer les valeurs expérimentales de l'amplitude $X_{m,exp}$ et de la période propre $T_{0,exp}$ des oscillations du solide (S) par identification avec les résultats de la modélisation de la courbe en annexe 1.

3. Les deux ressorts de constante de raideur k sont équivalents à un seul ressort de constante de raideur K = 2k. On fait l'hypothèse que l'expression de la période propre T_0 trouvée dans l'étude théorique de la partie A reste valable dans le cas de deux ressorts initialement tendus. Calculer, à partir des résultats de l'étude théorique, la période propre T_0 des oscillations.

4. *a)* Comparer les deux valeurs de la période propre en calculant l'écart relatif : $e = \left|\frac{T_{0,exp} - T_0}{T_0}\right|$.
b) L'hypothèse formulée à la question 3 est-elle vérifiée ?

C. Aspect énergétique en l'absence de frottement

Le système solide-ressort est toujours supposé osciller sans frottement. Dans le modèle d'oscillateur adopté, le choix des états de référence est tel que :
- l'énergie potentielle de pesanteur est nulle à l'altitude du centre d'inertie G,
- l'énergie potentielle élastique est nulle lorsque l'allongement du ressort est nul.

1. *a)* Rappeler l'expression de l'énergie mécanique E du système solide-ressort horizontal pour une position quelconque du centre d'inertie G, en fonction de m, K, x et v (valeur de la vitesse du point G).
b) Quelle est la propriété de l'énergie mécanique du système dans les conditions d'étude du mouvement ?

2. Soit V_m la valeur maximale de la vitesse atteinte par le point G pour les oscillations d'amplitude X_m étudiées. En utilisant la propriété de l'énergie mécanique donnée à la question précédente, montrer que $V_m = 2\pi.\frac{X_m}{T_0}$.

3. Calculer V_m pour une amplitude X_m = 4,3 cm et pour une période propre T_0 = 0,30 s.

4. Sans justifier, et en s'aidant du graphe en annexe 2, indiquer dans les cases grisées du graphe de l'annexe 3 :
- la durée désignée par la double flèche en fonction de T_0,
- les énergies E, E_c (énergie cinétique) et E_p (énergie potentielle élastique).

D. Aspect énergétique en présence de frottements

Le système solide-ressort est toujours supposé osciller, mais, cette fois, on tient compte des frottements.

1. *a)* De quel régime s'agit-il dans le cas où l'on observe toujours des oscillations bien que l'on ne puisse plus négliger les frottements ?
b) Comment nomme-t-on le temps caractéristique correspondant ?

2. Soit E_0 la valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur lâché sans vitesse initiale avec un allongement maximal initial $X_{m,0}$.
a) Établir l'expression de E_0 en fonction de $X_{m,0}$.
b) On constate expérimentalement qu'au bout d'une oscillation l'amplitude du mouvement est divisée par un nombre r (réel positif non nul). Établir, en fonction de r, l'expression du rapport de l'énergie mécanique correspondante E_1 à l'énergie mécanique initiale E_0.

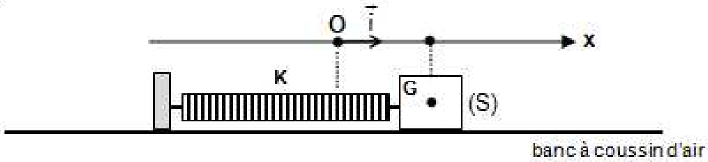
IV. Quatrième partie : comparaison des périodes du pendule simple (partie I) et du système solide-ressort (partie III)

Les comportements des deux pendules sont maintenant envisagés sur la Lune. Parmi les hypothèses ci-dessous, choisir pour chaque pendule celle qui est correcte.

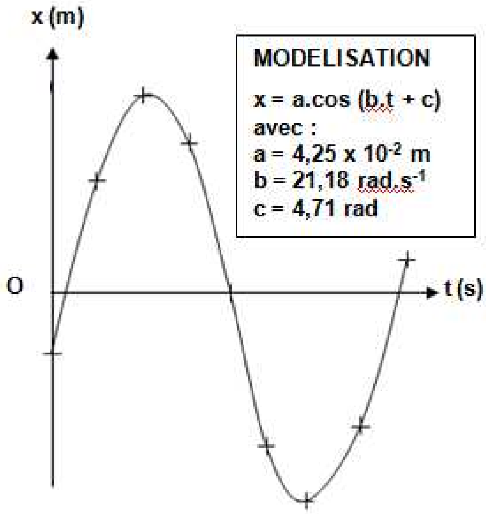
Hypothèse 1	Hypothèse 2	Hypothèse 3
T_0 ne varie pas	T_0 augmente	T_0 diminue

Annexes

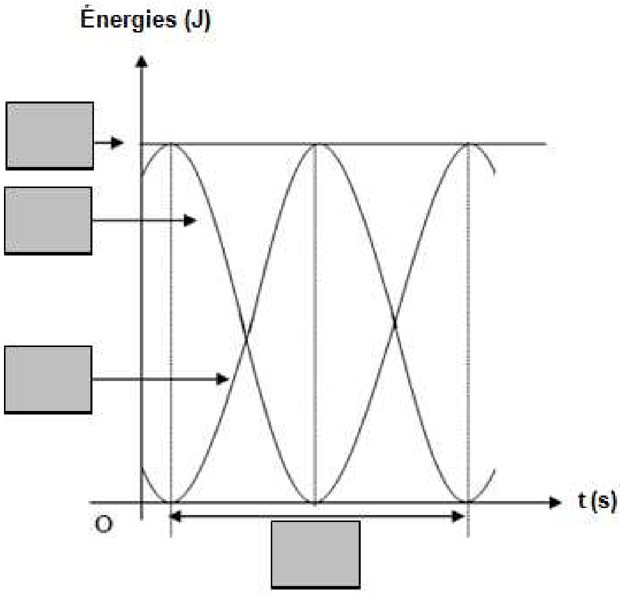
Annexe 1 (exercice n°1)



Annexe 2 (exercice n°1)



Annexe 3 (exercice n°1)



Corrigé

I. Première partie : le pendule simple

A. Etude énergétique

1. Donner l'expression de l'énergie cinétique au point G.

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}.m.v_G^2}$$

2. a) Donner l'expression de l'énergie mécanique E au point G en fonction de m, g, L, v et α.

$E = E_c + E_p$ soit : $\boxed{E = \frac{1}{2}.m.v_G^2 + m.g.L.(1 - \cos\alpha)}$

b) Pourquoi cette énergie mécanique se conserve-t-elle au cours des oscillations ?

Cette énergie se conserve car le pendule oscille sans frottement.

3. a) En exploitant la conservation de l'énergie mécanique, exprimer la vitesse v_0 au passage par la position d'équilibre en fonction de g, L et α_m.

Entre les points G_i et G_0, l'énergie mécanique se conserve : $E(G_i) = E(G_0)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}.m.v_i^2 + m.g.L.(1 - \cos\alpha_m) = \frac{1}{2}.m.v_0^2 + m.g.L.(1 - \cos\alpha_0)$

Or : $v_i = 0$ et $\cos\alpha_0 = 1 \Rightarrow m.g.L.(1 - \cos\alpha_m) = \frac{1}{2}.m.v_0^2 \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2.g.L.(1 - \cos\alpha_m)}}$

b) Calculer v_0.

$v_0 = \sqrt{2 \times 10{,}0 \times 1{,}00 \times (1 - 0{,}95)}$ = $\mathbf{1{,}0\ m.s^{-1}}$

B. Isochronisme

1. Énoncer la loi d'isochronisme des petites oscillations.

La période des oscillations d'un pendule simple est indépendante de l'amplitude de ces oscillations à condition que cette dernière reste faible.

2. En justifiant par une analyse dimensionnelle, choisir l'expression correcte de la période propre T_0 des oscillations parmi les suivantes :

Analyse dimensionnelle de l'expression : $T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{L}{g}}$

$[T_0] = T$; $[\pi] = 1$; $[L] = L$; $[g] = L.T^{-2} \Rightarrow [2.\pi.\sqrt{\frac{L}{g}}] = [\pi].[L]^{\frac{1}{2}}.[g]^{-\frac{1}{2}} = 1.\ L^{\frac{1}{2}}.L^{-\frac{1}{2}}.T^{1} = T = [T_0]$

L'expression est homogène.

II. Deuxième partie : le ressort

1. Déduire du graphe une relation numérique entre $\Delta\ell$ et m.

On obtient une droite qui passe par l'origine : $\Delta\ell$ est une fonction linéaire de m et $\Delta\ell = a.m$ (a : coefficient directeur de la droite).

$\boxed{a = \frac{\Delta\ell_N - \Delta\ell_M}{m_N - m_M}}$ soit : $\mathbf{a} = \frac{(3{,}32 - 1{,}66) \times 10^{-2}}{(40 - 20) \times 10^{-3}}$ = $\mathbf{8{,}3 \times 10^{-1}\ m.kg^{-1}}$

On a finalement : $\Delta\ell$ = $\mathbf{0{,}83.m}$

2. a) Après avoir fait le bilan des forces extérieures s'exerçant sur une masse m, établir l'expression littérale de la constante de raideur k du ressort.

La masse m est en équilibre sous l'action de 2 forces :

- son poids : $\vec{P}$
- la tension du ressort : $\vec{T}$

On a alors : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ et P = T avec P = m.g et T = k.$\Delta\ell$ => $\boxed{k = \dfrac{m.g}{\Delta\ell}}$

b) Après avoir rappelé l'unité de cette constante dans le Système International, vérifier l'homogénéité de l'expression par une analyse dimensionnelle.

La constante de raideur d'un ressort s'exprime en $N.m^{-1}$.

$[k] = M.L.T^{-2}.L^{-1} = M.T^{-2}$; $[m] = M$; $[g] = L.T^{-2}$; $[\Delta\ell] = L$

=> $[\dfrac{m.g}{\Delta\ell}] = M.L.T^{-2}.L^{-1} = M.T^{-2} = [k]$: la relation est homogène.

c) Calculer la valeur de k.

$\mathbf{k} = \dfrac{10,0}{0,83} = \mathbf{12\ N.m^{-1}}$

III. <u>Troisième partie</u> : le système solide-ressort

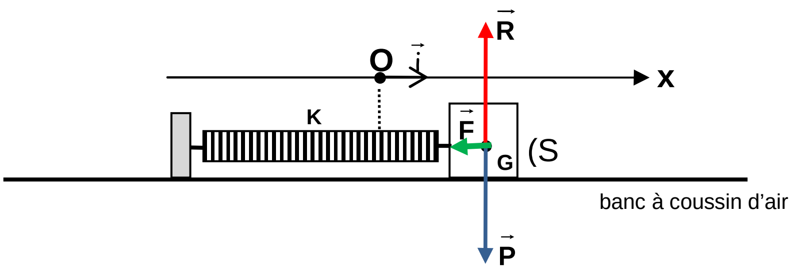
A. Etude théorique du mouvement du solide

1. <u>Forces exercées sur le solide en mouvement</u>

a) On note $\vec{F}$ la force exercée par le ressort sur le solide (S). Faire le bilan des autres forces extérieures qui s'exercent sur (S) à une date quelconque. Représenter toutes ces forces au point G, sans souci d'échelle, sur le schéma en annexe 1.

Hormis la force $\vec{F}$, le solide (S) est soumis à l'action :

- de son poids : $\vec{P}$
- de la réaction du support : $\vec{R}$



b) En rappelant l'expression de $\vec{F}$ dans le repère (O, $\vec{i}$), vérifier que cette force a bien le sens attendu sur le schéma en annexe 1.

$\vec{F} = - K.x.\vec{i}$: quand x > 0, $\vec{F}$ et $\vec{i}$ sont de sens contraire… ce qui correspond bien au schéma.

2. <u>Équation différentielle du mouvement du solide</u>

a) En appliquant la deuxième loi de Newton au solide (S), établir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G.

Système : solide (S) ; Référentiel : terrestre supposé galiléen

Deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m.\vec{a}_G$

Projection dans le repère (O, $\vec{i}$) : $F_x = m.a_x$ => $- K.x = m.\dfrac{d^2x}{dt^2}$ => $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{K}{m}.x = 0}$

b) Montrer que l'expression de la période propre T_0 de l'oscillateur est : $T_0 = 2\pi.\sqrt{\dfrac{m}{K}}$

De l'expression : $x = X_m.\cos\left[\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right).t + \varphi_0\right]$, on tire $\dfrac{d^2x}{dt^2} = - X_m.\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2.\cos\left[\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right).t + \varphi_0\right]$

$\Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2.x$

L'équation différentielle devient : $-\left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2.x + \dfrac{K}{m}.x = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{2\pi}{T_0}\right)^2.x = \dfrac{K}{m}.x \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi.\sqrt{\dfrac{m}{K}}}$

c) Vérifier l'homogénéité de l'expression de T_0 par une analyse dimensionnelle.

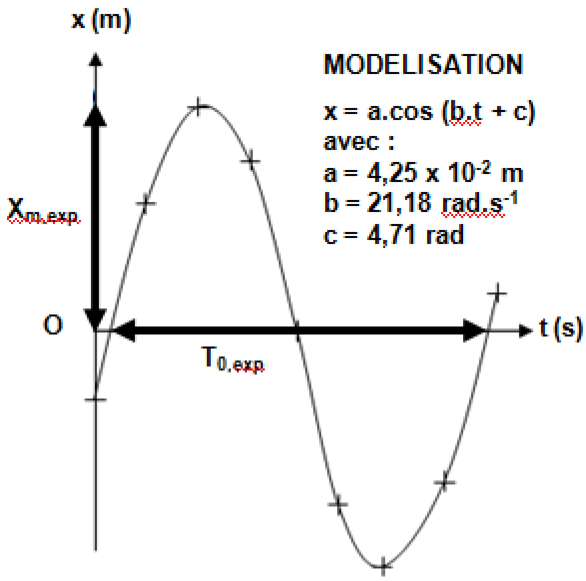
$[T_0] = T$; $[\pi] = 1$; $[m] = M$; $[K] = M.T^{-2}$

$[2\pi.\sqrt{\dfrac{m}{K}}] = [\pi].[m]^{1/2}.[K]^{-1/2} = 1.M^{1/2}.M^{-1/2}.T = T = [T_0]$: l'expression est homogène.

B. Retour à l'expérience

1. Sur le graphe en annexe 2, représenter les grandeurs expérimentales $T_{0,exp}$ et $X_{m,exp}$ par des segments en trait épais sur chacun des deux axes.

Voir ci-contre.



2. Déterminer les valeurs expérimentales de l'amplitude $X_{m,exp}$ et de la période propre $T_{0,exp}$ des oscillations du solide (S) par identification avec les résultats de la modélisation de la courbe en annexe 2.

$X_{m,exp} = a = \mathbf{4,25 \times 10^{-2}\ m}$

$\left(\dfrac{2\pi}{T_{0,exp}}\right) = b \Rightarrow T_{0,exp} = \dfrac{2\pi}{b}$ soit $T_{0,exp} = \dfrac{2\pi}{21,18} = \mathbf{0,297\ s}$

3. Calculer, à partir des résultats de l'étude théorique, la période propre T_0 des oscillations.

$T_0 = 2\pi.\sqrt{\dfrac{m}{K}}$ avec $K = 2k = 24,0\ N.m^{-1}$

$\Rightarrow T_0 = 2\pi.\sqrt{\dfrac{54 \times 10^{-3}}{24,0}} = \mathbf{0,298\ s}$

4. a) Comparer les deux valeurs de la période propre en calculant l'écart relatif : $e = \left|\dfrac{T_{0,exp} - T_0}{T_0}\right|$

$\mathbf{e} = \left|\dfrac{0,297 - 0,298}{0,298}\right| = \mathbf{3,36 \times 10^{-3}}$ ou $\mathbf{0,336\ \%}$

b) L'hypothèse formulée à la question 3 est-elle vérifiée ?

L'écart relatif est inférieur à 0,5% : l'expression de la période propre trouvée dans la partie A reste valable dans le cas des 2 ressorts initialement tendus.

C. Aspect énergétique en l'absence de frottement

1. a) Rappeler l'expression de l'énergie mécanique E du système solide-ressort horizontal pour une position quelconque du centre d'inertie G, en fonction de m, K, x et v (valeur de la vitesse du point G).

$E = E_c + E_p \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.K.x^2}$

b) Quelle est la propriété de l'énergie mécanique du système dans les conditions d'étude du mouvement ?

Le système est supposé osciller sans frottement : l'énergie mécanique E se conserve.

2. Soit V_m la valeur maximale de la vitesse atteinte par le point G pour les oscillations d'amplitude X_m étudiées. En utilisant la propriété de l'énergie mécanique donnée à la question précédente, montrer que $V_m = 2\pi.\frac{X_m}{T_o}$.

Lorsque le point G atteint l'abscisse $x = \pm X_m$ alors $v = 0$ et $E = \frac{1}{2}.K.X_m^2$

Lorsque le point G passe par l'abscisse $x = 0$ alors $v = \pm V_m$ et $E = \frac{1}{2}.m.V_m^2$

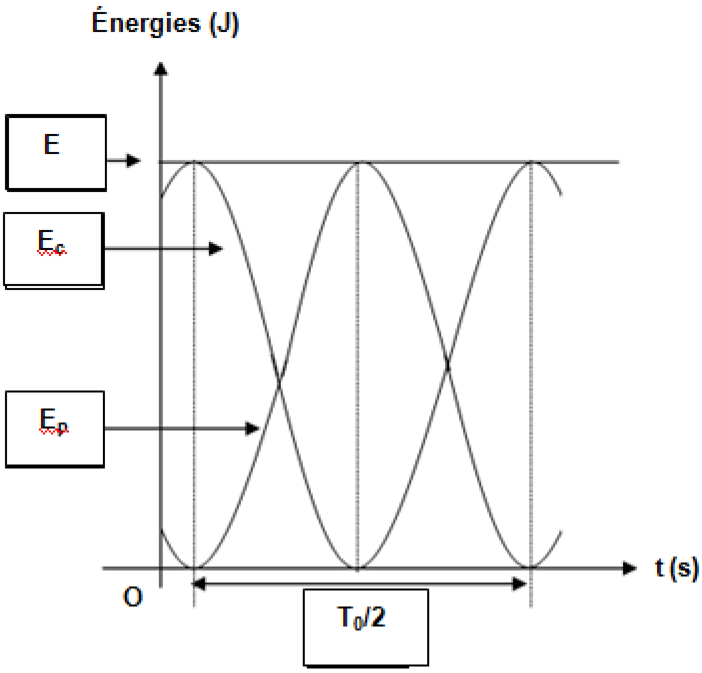
$\Rightarrow \frac{1}{2}.m.V_m^2 = \frac{1}{2}.K.X_m^2$ et $V_m = X_m.\sqrt{\frac{K}{m}}$. Or : $\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{T_o} \Rightarrow \boxed{V_m = 2\pi.\frac{X_m}{T_o}}$

3. Calculer V_m pour une amplitude X_m = 4,3 cm et pour une période propre T_0 = 0,30 s.

$V_m = 2\pi \times \frac{4,3 \times 10^{-2}}{0,30} = \mathbf{9,0 \times 10^{-1}\ m.s^{-1}}$

4. Sans justifier, et en s'aidant du graphe en annexe 2, légender le graphe de l'annexe 3 en indiquant :
- la durée désignée par la double flèche en fonction de T_0,
- les énergies E, E_c (énergie cinétique) et E_p (énergie potentielle élastique).

Voir ci-contre.



D. Aspect énergétique en présence de frottements

1. a) De quel régime s'agit-il dans le cas où l'on observe toujours des oscillations bien que l'on ne puisse plus négliger les frottements ?

Il s'agit du régime pseudo-périodique.

b) Comment nomme-t-on le temps caractéristique correspondant ?

Le temps caractéristique est la pseudo-période T.

2. Soit E_0 la valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur lâché sans vitesse initiale avec un allongement maximal initial $X_{m,0}$.
a) Établir l'expression de E_0 en fonction de $X_{m,0}$.

Au moment où l'oscillateur est lâché, v = 0. Donc $E_0 = E_{p,0}$ => $\boxed{E_0 = \frac{1}{2}.K.X_{m,o}^2}$

b) On constate expérimentalement qu'au bout d'une oscillation l'amplitude du mouvement est divisée par un nombre r (réel positif non nul). Établir, en fonction de r, l'expression du rapport de l'énergie mécanique correspondante E_1 à l'énergie mécanique initiale E_0.

$$X_{m,1} = \frac{X_{m,0}}{r} \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2}.K.X_{m,1}^2 = \frac{1}{2}.K.\left(\frac{X_{m,0}}{r}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{1}{2}.K.\left(\frac{X_{m,o}}{r}\right)^2}{\frac{1}{2}.K.X_{m,0}^2} \text{ et } \boxed{\frac{E_1}{E_0} = \frac{1}{r^2}}$$

IV. Quatrième partie : comparaison des périodes du pendule simple (partie I) et du système solide-ressort (partie III)

Les comportements des deux pendules sont maintenant envisagés sur la Lune. Parmi les hypothèses ci-dessous, choisir pour chaque pendule celle qui est correcte.

Hypothèse 1	Hypothèse 2	Hypothèse 3
T_0 ne varie pas	T_0 augmente	T_0 diminue

La valeur du champ de pesanteur sur la Lune est plus faible que sur la Terre.
La période propre des oscillations du pendule simple est inversement proportionnelle à la racine carrée de la valeur du champ de pesanteur : T_0 augmente.
La période propre des oscillations du système solide-ressort ne dépend pas de la valeur du champ de pesanteur : T_0 ne varie pas.